

Références :

Algèbre, Serge Lang

Théo. Pour $n \geq 5$, $\mathcal{A}_n$ est simple.

Lemme.

- (i) Pour $n \geq 3$, $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
- (ii) Pour $n \geq 5$ les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$.

Démonstration. (i) Vérifions que les 3-cycles sont dans $\mathcal{A}_n$.

$(i j k) = (i j)(j k)$ donc la signature d'un 3-cycle est 1.

Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, on a donc forcément $\sigma = \tau_1 \dots \tau_{2k}$, c'est un produit de doubles transpositions.

Montrons que les doubles transpositions sont produit de 3-cycles.

Soit $i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Posons $\tau = (i j)$ et $\sigma = (k l)$.

- Si $\text{Supp}(\tau) = \text{Supp}(\sigma)$, alors $\tau\sigma = \text{id}$
- Si $|\text{Supp}(\tau) \cap \text{Supp}(\sigma)| = 1$ alors $\tau\sigma$ est un 3-cycle.
- Sinon $\tau\sigma = (i j)(j k)(j k)(k l) = (i j k)(j k l)$.

- (ii) Soit $(j_1, j_2, j_3, i_1, i_2, i_3) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $(j_1 j_2 j_3) = \sigma(i_1 i_2 i_3)\sigma^{-1}$.

- $\sigma \in \mathcal{A}_n$, alors le résultat est montré.
- Sinon, soit $k, l \neq i_1, i_2, i_3$ alors $\sigma' = \sigma(k l) \in \mathcal{A}_n$ et $(j_1 j_2 j_3) = \sigma'(i_1 i_2 i_3)\sigma'^{-1}$

□

Démonstration. Soit $N \trianglelefteq \mathcal{A}_n \setminus$ et $N \neq \{Id\}$. Montrons que $N = \mathcal{A}_n$. Si N contient un 3-cycle alors, N contient tous les 3-cycles et s'il contient tous les 3-cycles alors $N = \mathcal{A}_n$. Montrons que N contient un 3-cycle. Soit σ la permutation ayant le plus de points fixes de $N \setminus \{id\}$ (i.e la permutation de support minimal).

1. Montrons que σ n'est pas un produit de transpositions disjointes. Supposons que σ est un produit de transpositions disjointes.

Comme $\sigma \in \mathcal{A}_n$, il y a donc au moins deux transpositions $(i j)$ et $(k l)$. Soit $m \neq i, j, k, l$, posons $\tau = (k l m)$ et

$$\sigma' = \underbrace{\tau\sigma\tau^{-1}}_{\in N} \underbrace{\sigma^{-1}}_{\in N} \in N$$

Les points fixes de σ , différents de m , sont fixes par σ' .

De plus, $\sigma'(j) = j$ et $\sigma'(i) = i$ donc σ' a plus de points fixes que σ ABSURDE.

On obtient donc $\sigma = c_1 c_2 \dots c_r$ produit de cycles disjoints. Il existe donc $c_p = (i j k \dots)$.

2. Montrons que $\sigma = (i j k)$

Par l'absurde, supposons $\sigma \neq (i j k)$.

Il existe $l, m \neq i, j, k$ déplacés par σ . Soit $\tau = (k l m)$

$$\sigma' = \underbrace{\tau\sigma\tau^{-1}}_{\in N} \underbrace{\sigma^{-1}}_{\in N} \in N$$

j est un point fixe supplémentaire de σ' . ABSURDE.

□

Leçons possibles : 103 - 104 - 105 - 108